

REPASO Y EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Capítulo 5

Matemática financiera

Por Prof. María Teresa Arzola

Valor presente y valor futuro de cantidades sencillas y anualidades; Líneas de tiempo

FORMULAS:

Valor futuro de cantidades sencillas

$$VF = VP (1 + i)^n$$

$$FV_n = PV \times (1 + r)^n$$

Valor presente de cantidades sencillas

$$VP = VF \left(\frac{1}{1+i} \right)^n$$

$$PV = \frac{FV_n}{(1+r)^n}$$

Valor futuro de anualidades

$$VF@ = @ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$FV_n = CF \times \left\{ \frac{[(1+r)^n - 1]}{r} \right\}$$

Valor presente de anualidades

$$VP@ = @ \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n}{i} \right]$$

$$PV_n = \left(\frac{CF}{r} \right) \times \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

INSTRUCCIONES:

Para contar periodos: último periodo menos primer periodo

Para contar anualidades: periodo de la última anualidad menos periodo de la primera anualidad, más 1

En las fórmulas de anualidades:

1. La “n” siempre es igual al número de anualidades
2. La “i” siempre está capitalizada a la misma frecuencia que la anualidad
3. El resultado de la fórmula de valor **futuro** de una anualidad siempre cae automáticamente **en el mismo periodo que la última anualidad**
4. El resultado de la fórmula de valor **presente** de una anualidad siempre cae automáticamente **en el periodo antes de la primera anualidad**

EJERCICIOS DE PRÁCTICA:

1. Cuánto dinero voy a tener ahorrado en al año 21 si deposito \$700 hoy, \$900 en el año 2, \$1,000 anuales del 5 al 13 y \$1,000 anuales del 15 al 19. La tasa de interés es 6% anual.

Video de este ejercicio: https://www.youtube.com/watch?v=w5re4je_csQ

									VF
0	1	2	3	4	5 al 13	14	15 al 19	20	21
\$700		\$900			@ \$1,000		@ \$1,000		

- Periodos para buscar el valor futuro de los \$700: $21 - 0 = 21$
- Periodos para buscar el valor futuro de los \$900: $21 - 2 = 19$
- Número de anualidades del 5 al 13: $13 - 5 = 8 + 1 = 9$
- El valor futuro de la anualidad anterior cae en el 13, para llevar su valor futuro al 21, tenemos que contar los periodos: $21 - 13 = 8$
- Número de anualidades del 15 al 19: $19 - 15 = 4 + 1 = 5$
- El valor futuro de la anualidad anterior cae en el 19, , para llevar su valor futuro al 21, tenemos que contar los periodos: $21 - 19 = 2$

$$VF = \$700 (1.06)^{21} = \underline{\underline{\$2,379.69}} \text{ al año 21}$$

$$VF = \$900 (1.06)^{19} = \underline{\$2,723.04} \text{ al año 21}$$

$$VF@ = \$1,000 \left[\frac{(1.06)^9 - 1}{.06} \right] = \$11,491.32 \text{ al año 13}$$

$$VF = \$11,491.32 (1.06)^8 = \underline{\$18,315.42} \text{ al año 21}$$

$$VF@ = \$1,000 \left[\frac{(1.06)^5 - 1}{.06} \right] = \$5,637.09 \text{ al año 19}$$

$$VF = \$5,637.09 (1.06)^2 = \underline{\$6,333.83} \text{ al año 21}$$

Contestación: $\$2,379.69 + \$2,723.04 + \$18,315.42 + \$6,333.83 = \underline{\$29,751.98}$ al año 2035

2. Cuánto dinero tengo que depositar en el periodo 3 para poder retirar \$300 en el periodo 6, \$500 anuales del periodo 8 al periodo 10 y \$800 anuales del periodo 12 al periodo 20. La tasa de interés es 5% anual.

Video de este ejercicio: <https://www.youtube.com/watch?v=9TNshjkk6g>

VP										
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 – 20	
			\$300		\$500	\$500	\$500			@\$800

- Periodos para buscar el valor presente de los \$300: $6 - 3 = 3$
- Número de anualidades de \$500 del 8 al 10: $10 - 8 = 2 + 1 = 3$
- El valor presente de la anualidad anterior cae en el periodo 7, para llevarlo al periodo 3, tenemos que contar periodos: $7 - 3 = 4$
- Número de anualidades de \$800 del 12 al 20: $20 - 12 = 8 + 1 = 9$
- El valor presente de la anualidad anterior cae en el periodo 11, para llevarlo al periodo 3, tenemos que contar periodos: $11 - 3 = 8$

$$VP = \$300 \left(\frac{1}{1.05} \right)^3 = \underline{\$259.15} \text{ al año 3}$$

$$VP@ = \$500 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.05} \right)^3}{.05} \right] = \$1,361.62 \text{ al año 7}$$

$$VP = \$1,361.62 \left(\frac{1}{1.05} \right)^4 = \underline{\$1,120.21} \text{ al año 3}$$

$$VP@ = \$800 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.05}\right)^9}{.05} \right] = \$5,686.26 \text{ al año 11}$$

$$VP = \$5,686.26 \left(\frac{1}{1.05}\right)^8 = \underline{\underline{\$3,848.68}} \text{ al año 3}$$

Contestación: $\$259.15 + \$1,120.21 + \$3,848.68 = \underline{\underline{\$5,228.04}}$ al año 3

3. Cuánto dinero voy a tener ahorrado en el periodo 25 si deposito \$5,000 anuales del periodo 3 al 15; \$1,500 en el periodo 16 y \$2,000 anuales del periodo 17 al 22. La tasa de interés es 8% anual.

					VF
3-15	16	17-22	23	24	25
@\$5,000	\$1,500	@\$2,000			

- Número de anualidades de \$5,000 del 3 al 15: $15 - 3 = 12 + 1 = 13$
- El valor futuro de la anualidad anterior cae en el periodo 15, para llevarlo al 25, tenemos que contar periodos: $25 - 15 = 10$
- Periodos para buscar el valor futuro de los \$1,500: $25 - 16 = 9$
- Número de anualidades de \$2,000 del 17 al 22: $22 - 17 = 5 + 1 = 6$
- El valor futuro de la anualidad anterior cae en el periodo 22, para llevarlo al 25, tenemos que contar periodos: $25 - 22 = 3$

$$VF@ = \$5,000 \left[\frac{(1.08)^{13} - 1}{.08} \right] = \$107,476.48 \text{ al año 15}$$

$$VF = \$107,476.48 (1.08)^{10} = \underline{\underline{\$232,033.67}} \text{ al año 25}$$

$$VF = \$1,500 (1.08)^9 = \underline{\underline{\$2,998.51}} \text{ al año 25}$$

$$VF@ = \$2,000 \left[\frac{(1.08)^6 - 1}{.08} \right] = \$14,671.86 \text{ al año 22}$$

$$VF = \$14,671.86 (1.08)^3 = \underline{\underline{\$18,482.32}} \text{ al año 25}$$

Contestación: $\$232,033.67 + \$2,998.15 + \$18,482.32 = \underline{\underline{\$253,514.14}}$ al año 2

4. Cuánto dinero tengo que depositar hoy para poder retirar \$2,000 anuales del 3 al 7 y \$3,000 anuales del 8 al 17. La tasa de interés es 7% anual.

VP					
0	1	2	3 - 7	8 - 17	
			@\$2,000	@\$3,000	

- Número de anualidades de \$2,000 del 3 al 7: $7 - 3 = 4 + 1 = 5$
- El valor presente de la anualidad anterior cae en el año 2, para llevarlo al 0, tenemos que contar periodos: $2 - 0 = 2$
- Número de anualidades de \$3,000 del 8 al 17: $17 - 8 = 9 + 1 = 10$
- El valor presente de la anualidad anterior cae en el año 7, para llevarlo al 0, tenemos que contar periodos: $7 - 0 = 7$

$$VP@ = \$2,000 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.07}\right)^5}{.07} \right] = \$8,200.39 \text{ al año 2}$$

$$VP = \$8,200.39 \left(\frac{1}{1.07}\right)^2 = \underline{\underline{\$7,162.54}} \text{ al año 0}$$

$$VP@ = \$3,000 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.07}\right)^{10}}{.07} \right] = \$21,070.74 \text{ al año 7}$$

$$VP = \$21,070.74 \left(\frac{1}{1.07}\right)^7 = \underline{\underline{\$13,121.80}} \text{ al año 0}$$

Contestación: $\$7,162.54 + \$13,121.80 = \underline{\underline{\$20,284.34}}$ al año 0

**Anualidades que ocurren más de una vez al año;
Buscar la anualidad;
Pre pagadas (annuity due);
Perpetuas y perpetuas con crecimiento constante**

EJERCICIOS PRÁCTICA:

1. ¿Cuánto dinero tengo que depositar trimestralmente para poder tener ahorrado \$3,000 al final del año 3? La tasa de interés es 6% anual capitalizado trimestralmente. Encuentre la tasa de interés efectiva.

Video para los ejercicios 1 y 2:

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=0AwqDPDYbHo&list=PLWmrbvNxqSeY4DOsfnKGsniV0mO3AGJd3

$$\begin{aligned}i &= \frac{.06}{4} = .015 \\n &= 3 \times 4 = 12 \\VF@ &= \$3,000\end{aligned}$$

$$\$3,000 = @ \times \left[\frac{(1.015)^{12} - 1}{.015} \right]$$

$$\$3,000 = @ \times 13.041211$$

$$@ = \frac{\$3,000}{13.041211} = \mathbf{\$230.04} \text{ trimestralmente}$$

$$\text{Tasa efectiva (EAR)} = \left(1 + \frac{.06}{4} \right)^4 - 1$$

$$1.061364 - 1$$

$$.061364 = \mathbf{6.1364\% \text{ anual}}$$

2. ¿Cuál será la mensualidad a pagar si tomo prestado \$2,000 por dos años al 10% anual, capitalizado mensualmente? Encuentre la tasa de interés efectiva.

$$i = \frac{.10}{12} = .008333$$

$$n = 2 \times 12 = 24$$

$$VP@ = \$2,000$$

$$\$2,000 = @ (21.670942)$$

$$@ = \frac{\$2,000}{21.670942} = \mathbf{\$92.29} \text{ mensualmente}$$

$$\text{Tasa efectiva (EAR)} = \left(1 + \frac{.10}{12}\right)^{12} - 1$$

$$1.104713 - 1$$

$$.104713 = \mathbf{10.4713\% \text{ anual}}$$

3. ¿Cuánto voy a tener ahorrado **al final del año 8** si deposito \$1,000 **al principio** de cada uno de los próximos 8 años? La tasa de interés es 3.5% anual.

Video para los ejercicios 3 y 4:

<https://www.youtube.com/watch?v=qXdlcJ8Q0T4&index=5&list=PLWmrbvNxqSeY4DOsfnKGsniV0mO3AGJd3>

$$VF@ = \$1,000 \times \left[\frac{(1.035)^8 - 1}{.035} \right]$$

$$VF@ = \$9,051.69 \text{ al } \mathbf{principio} \text{ del año 8}$$

Para llevarlo al final del año 8:

$$VF = \$9,051.69 (1.035)^1 = \mathbf{\$9,368.50} \text{ al final del año 8}$$

4. ¿Cuánto tengo que depositar hoy para poder retirar \$2,000 al principio de cada uno de los próximos 3 años? La tasa de interés es 8.2% anual.

$$VP@ = \$2,000 \times \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.082}\right)^3}{.082} \right]$$

$$VP@ = \$5,135.65 \text{ al principio del año 0}$$

Para llevarlo al final del año 0:

$$VF = \$5,135.65 (1.082)^1 = \mathbf{\$5,556.77} \text{ al final del año 0 (hoy)}$$

5. ¿Cuánto tengo que depositar hoy para establecer una beca a perpetuidad que pague \$3,000 anuales al estudiante más destacado de la FAE? La tasa de interés es 6% anual.

Video para los ejercicios 5 y 6:

<https://www.youtube.com/watch?v=QEz8FkI2Ez4&index=6&list=PLWmrbvNxqSeY4DOsfnKGsniV0mO3AGJd3>

$$VP@ \text{ perpetua} = \frac{\$3,000}{.06} = \mathbf{\$50,000}$$

6. Encuentre el valor de una empresa. La empresa generó un flujo de efectivo de \$1,000,000 este año (año 0) y se espera que este flujo de efectivo crezca a razón de 3% anual. El rendimiento requerido por los inversionistas es 11% anual.

$$@_1 = \$1,000,000 (1.03) = \$1,030,000$$

$$VP@ \text{ perpetua con crecimiento constante} = \frac{\$1,030,000}{.11 - .03} = \mathbf{\$12,875,000}$$

7. Encuentre el valor de una empresa. Los flujos de efectivo esperados son los siguientes:

- Año 0 a año 3: \$0
- Año 4 a año 10: \$300,000 anuales
- Se espera que desde el año 11 en adelante, el flujo de efectivo esperado crezca a razón de 4% anual

El rendimiento requerido por los inversionistas es 12% anual.

VP						
0	1	2	3	4-10	11-∞	
				@\$300,000	g = .04	

- Para contar las anualidades del 4 al 10: $10 - 4 = 6 + 1 = 7$
- El valor presente de la anualidad anterior cae en el 3, para llevarla al cero, hay que contar periodos: $3 - 0 = 3$
- Teneos que encontrar la anualidad del año 11, que es la primera que crece a razón de 4%: $@_{11} = \$300,000 (1.04) = \$312,000$
- El valor presente de la anualidad perpetua anterior va a caer en el año 10, para llevarlo al cero, hay que contar periodos: $10 - 0 = 10$

$$VP@ = \$300,000 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.12}\right)^7}{.12} \right] = \$1,369,126.13 \text{ al año 3}$$

$$VP = \$1,369,126.13 \left(\frac{1}{1.12}\right)^3 = \underline{\underline{\$974,517.53}} \text{ al año 0}$$

$$VP@perpetua = \frac{\$312,000}{.12 - .04} = \$3,900,000 \text{ al año 10}$$

$$VP = \$3,900,000 \left(\frac{1}{1.12}\right)^{10} = \underline{\underline{\$1,255,695.62}} \text{ al año 0}$$

$$\text{Contestación: } \$974,517.53 + \$1,255,695.62 = \underline{\underline{\$2,230,213.15}}$$

8. Tengo \$2,000 depositados en estos momentos y mi meta es tener ahorrado \$5,000 en el año 6. ¿Cuánto tendría que depositar mensualmente para lograr mi meta? La tasa de interés es 4% anual, capitalizada mensualmente.

$$\begin{aligned}i &= \frac{.04}{12} = .003333 \\n &= 6 \times 12 = 72 \\VF@ &= \$5,000\end{aligned}$$

- Primero busco el valor futuro de la cantidad que ya tengo:

$$VF = \$2,000 (1.003333)^{72} = \mathbf{\$2,541.42}$$
 al año 6

- Resto el valor futuro de la cantidad que ya tengo de los \$5,000 que quiero tener al año 6:

$$\$5,000 - \$2,541.42 = \mathbf{\$2,458.58}$$
 (lo que me faltaría al año 6 para lograr mi meta)

$$\$2,458.58 = @ \times \left[\frac{(1.003333)^{72} - 1}{.003333} \right]$$

$$\$2,458.58 = @ (81.221567)$$

$$@ = \frac{\$2,458.58}{81.221567} = \mathbf{\underline{\underline{\$30.27}}}$$
 mensualmente

**Tasa de interés implícita en cantidades sencillas;
Tasa de interés implícita en anualidades;
Tasa de interés implícita en series irregulares**

Fórmula para interpolar:

$$Tasa\ menor. + \left[\frac{factor\ de\ la\ tasa\ menor - factor\ de\ la\ tasa\ implícita}{factor\ de\ la\ tasa\ menor - factor\ de\ la\ tasa\ mayor} \right]$$

EJERCICIOS PRÁCTICA:

- 1) María compró un terreno hace 10 años a \$50,000. Hoy este terreno tiene un valor de \$80,000. Encuentre cuál ha sido en rendimiento de María en la inversión de este terreno.

Video para los ejercicios 1 y 2:

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=xmUeuWrfdmDU&list=PLWmrbvNxqSeY4DOsfmKGsniV0mO3AGJd3

$$VP = \$50,000 \quad VF = \$80,000 \quad N = 10$$

$$VF = VP (1 + i)^n$$

$$\$80,000 = \$50,000 (1 + i)^{10}$$

$$1.6 = (1 + i)^{10}$$

$$1.0481 = 1 + i$$

$$i = \mathbf{4.81\%}$$

- 2) Si deposito \$800 al final de cada uno de los próximos 7 años y al final del año 7 tengo ahorrado \$6,500, ¿qué tasa de rendimiento estoy recibiendo?

$$@ = \$800 \quad n = 7 \quad VF@ = \$6,500 \quad i = ?$$

$$VF@ = @ \times FVF@$$

$$\$6,500 = \$800 \times FVF@7n$$

$$8.125 = FVF@7n$$

4% X% 5%

7.898 8.125 8.142

$$i = 4. + \left[\frac{7.898 - 8.125}{7.898 - 8.142} \right]$$

i = 4.93%

- 3) Si tomo prestado \$6,000 hoy y tengo que pagar \$350 trimestralmente por 5 años, ¿qué tasa de interés me están cobrando? Encuentre la contestación en:
- a) Términos trimestrales
 - b) APR
 - c) EAR

Video para este ejercicio:

https://www.youtube.com/watch?v=8vGUwrm_SFU&index=8&list=PLWmrbvNxqSeY4DOsfnKGsniV0mO3AGJd3

$$VP@ = \$6,000 \quad @ = \$350 \quad n = 5 \times 4 = 20$$

$$VP@ = @ \times FVP@$$

$$\$6,000 = \$350 \times FVP@20n$$

$$17.143 = FVP@20n$$

1% x% 2%
18.046 17.143 16.351

$$i = 1. + \left[\frac{18.046 - 17.143}{18.046 - 16.351} \right]$$

i = 1.5327% trimestral

APR = 1.5327% x 4 = 6.1308% anual, capitalizado trimestralmente

$$EAR = \left(1 + \frac{.061308}{4}\right)^4 - 1 = 6.2732\%$$

- 4) Encuentre la tasa de interés implícita si tomamos prestado \$10,000 hoy y tenemos que pagar \$3,000 al final del año 1, \$2,500 al final del año dos, \$3,500 al final del año 3 y \$3,000 al final del año 4.

Video para este ejercicio:

https://www.youtube.com/watch?v=I6kqE7PHqfM&list=PLWmrbvNxqSeY4DOsfmKGsniV0mO3AGJd3&feature=player_embedded

0	1	2	3	4
\$10,000	\$3,000	\$2,500	\$3,500	\$3,000

$$\$10,000 = \$3,000 \left(\frac{1}{1+i}\right)^1 + \$2,500 \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \$3,500 \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 + \$3,000 \left(\frac{1}{1+i}\right)^4$$

Buscamos anualidad promedio:

$$\frac{(\$3,000 + \$2,500 + \$3,500 + \$3,000)}{4} = \$3,000$$

\$10,000 = \$3,000 x FVP@4n
 3.333 = FVP@4n
 i está cerca de 8%

TANTEAR:

$$8\% \gg \$3,000 \left(\frac{1}{1.08}\right)^1 + \$2,500 \left(\frac{1}{1.08}\right)^2 + \$3,500 \left(\frac{1}{1.08}\right)^3 + \$3,000 \left(\frac{1}{1.08}\right)^4 = \$9,904.63$$

$$7\% \gg \$3,000 \left(\frac{1}{1.07}\right)^1 + \$2,500 \left(\frac{1}{1.07}\right)^2 + \$3,500 \left(\frac{1}{1.07}\right)^3 + \$3,000 \left(\frac{1}{1.07}\right)^4 = \$10,133.06$$

$$i = 7. + \left[\frac{\$10,133.06 - \$10,000}{\$10,133.06 - \$9,904.63} \right] = 7.58\%$$

- 5) Si ahorro \$275 todos los meses y mi meta es tener ahorrado \$10,000 al final de 2 años, ¿qué tasa de interés tendría que ganar?
- a) Términos mensuales
 - b) APR
 - c) EAR

$$VF@ = \$10,000 \quad @ = \$275 \quad n = 2 \times 12 = 24 \text{ meses}$$

$$\$10,000 = \$275 \times FVF@24n$$

$$36.364 = FVF@24n$$

3%	x%	4%
34.426	36.364	39.083

$$i = 3. + \left[\frac{34.426 - 36.364}{34.426 - 39.083} \right] = 3.416\% \text{ mensual}$$

$$\text{APR} = 3.416\% \times 12 = 40.99\% \text{ anual, capitalizado mensualmente}$$

$$\text{EAR} = \left(1 + \frac{.4099}{12} \right)^{12} - 1 = 49.64\% \text{ anual}$$

- 6) Encuentre la tasa de interés que me estaría brindando una inversión por la cual tengo que pagar \$3,000 hoy a cambio de recibir \$1,200 al final del año 1, \$1,500 al final del año dos y \$1,000 al final del año 3.

0	1	2	3
\$3,000	\$1,200	\$1,500	\$1,000

$$\$3,000 = \$1,200 \left(\frac{1}{1+i}\right)^1 + \$1,500 \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \$1,000 \left(\frac{1}{1+i}\right)^3$$

$$\frac{(\$1,200 + \$1,500 + 1,000)}{3} = \$1,233.33$$

$$\$3,000 = \$1,233.33 \times \text{FVP}@3n$$

$$2.432 = \text{FVP}@3n$$
 i está cerca de 11%

TANTEAR:

$$11\% \gg \$1,200 \left(\frac{1}{1.11}\right)^1 + \$1,500 \left(\frac{1}{1.11}\right)^2 + \$1,000 \left(\frac{1}{1.11}\right)^3 = \$3,029.71$$

$$12\% \gg \$1,200 \left(\frac{1}{1.12}\right)^1 + \$1,500 \left(\frac{1}{1.12}\right)^2 + \$1,000 \left(\frac{1}{1.12}\right)^3 = \$2,979.00$$

$$i = 11. + \left[\frac{\$3,029.71 - \$3,000.00}{\$3,029.71 - \$2,979.00} \right] = \mathbf{11.586\%}$$